Couplage de moments cinétiques

Soient $\boldsymbol{j}_1$ et $\boldsymbol{j}_2$ les moments cinétiques respectifs de deux systèmes distincts 1 et 2

$\Rightarrow$ base complète de vecteurs propres communs à $\boldsymbol{j}_1^2$, $\boldsymbol{j}_2^2$, j_{1z} et j_{2z} :

$$|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \tag{1}$$

$\alpha \equiv$ {autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier complètement l'état du système formé par la réunion des systèmes 1 et 2}

$\equiv$ valeurs propres des observables A formant avec $\boldsymbol{j}_1^2$, $\boldsymbol{j}_2^2$, j_{1z} et j_{2z} un ECOC

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j}_1^2|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle &= j_1(j_1+1)|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \\
j_{1z}|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle &= m_1|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j}_2^2|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle &= j_2(j_2+1)|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \\
j_{2z}|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle &= m_2|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle
\end{aligned}$$

On choisit pour $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ la base standard par rapport aux moments cinétiques 1 et 2

- A chaque suite $(\alpha j_1 j_2)$ correspond autant de vecteurs qu'il existe de couples $(m_1 m_2)$ distincts qui se déduisent les uns des autres par application répétée de $j_{1\pm}$ et $j_{2\pm}$
- les $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ sous-tendent un sous-espace $\mathcal{E}(\alpha j_1 j_2)$ de dimension $(2j_1+1)(2j_2+1)$

Théorème fondamental d'addition de deux moments cinétiques

Objectif : déterminer les valeurs et vecteurs propres des opérateurs $\boldsymbol{J}^2$ et J_z

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 \tag{2}$$

$$J_z = j_{1z} + j_{2z} \tag{3}$$

$$J^2 = (j_{1x} + j_{2x})^2 + (j_{1y} + j_{2y})^2 + (j_{1z} + j_{2z})^2 \tag{4}$$

Quelques trivialités

1. La somme de deux (opérateurs) moment cinétique est un (opérateur) moment cinétique
2. Les valeurs propres de $\boldsymbol{J}^2$ sont $J(J+1)$

   avec J nul, entier positif ou demi-entier positif
3. Pour J fixé, les vecteurs propres se déduisent les uns des autres par application répétée de J_+ ou J_- ; ils correspondent respectivement aux $(2J+1)$ valeurs de $M = -J, -J+1, \ldots, J-1, J$
4. $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \equiv$ fonction propre de J_z, de valeur propre $m_1 + m_2$

Mais ! $\quad [j_{1z}, \boldsymbol{J}^2] \neq 0, \quad [j_{2z}, \boldsymbol{J}^2] \neq 0$

En effet $\quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 \quad \Rightarrow \boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{j}_1^2 + \boldsymbol{j}_2^2 + 2\boldsymbol{j}_1 \cdot \boldsymbol{j}_2$

$$\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{j}_1^2 + \boldsymbol{j}_2^2 + 2(j_{1x}j_{2x} + j_{1y}j_{2y} + j_{1z}j_{2z})$$

Or $\quad [j_{1z}, j_{1x}] \neq 0, \qquad [j_{1z}, j_{1y}] \neq 0$

Soit, pour chaque valeur de J : $N(J) \equiv$ nombre de séries linéairement indépendantes de $(2J+1)$ vecteurs propres du moment total J

Soit $n(M) \equiv$ ordre de dégénérescence de la valeur propre M

$$\Leftrightarrow \quad n(M) = \sum_{J \geq |M|} N(J) \tag{5}$$

$$\begin{aligned} n(J) &= N(J) + N(J+1) + \ldots + N(J_{\mathrm{max}}) \\ n(J+1) &= N(J+1) + \ldots + N(J_{\mathrm{max}}) \\ n(J) - n(J+1) &= N(J) \end{aligned} \tag{6}$$

$\Rightarrow$ pour obtenir $N(J)$: il suffit de déterminer $n(M)$ pour chaque valeur de M

Or $n(M) \equiv$ nombre de couples $(m_1 m_2)$ tels que $M = m_1 + m_2$

Si $j_1 > j_2$:

$$n(M) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |M| > j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 + 1 - |M| & \text{si} \quad j_1 + j_2 \geq |M| \geq |j_1 - j_2| \\ 2j_2 + 1 & \text{si} \quad |j_1 - j_2| \geq |M| \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

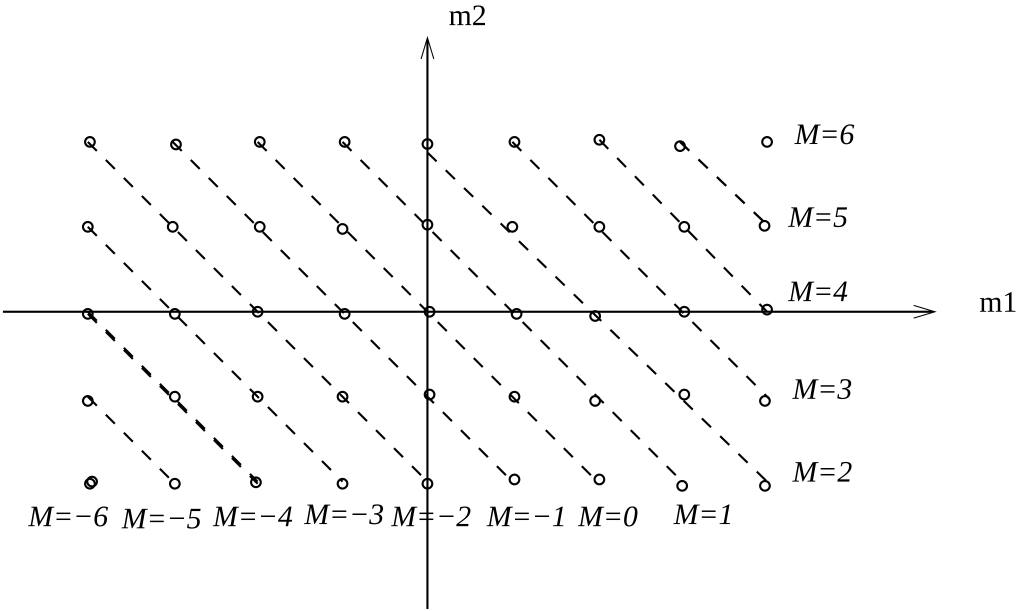

FIG. 1 – Dénombrement des valeurs possibles de M dans le cas $j_1 = 4$ et $j_2 = 2$

Substituant ces nombres dans la relation (6)

$$\Rightarrow \quad N(J) = 1 \quad \text{pour} \quad J = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1,\ \ldots,\ |j_1 - j_2| \tag{8}$$

On a donc démontré le théorème fondamental d'addition :

Dans l'espace de dimension $(2j_1{+}1)(2j_2{+}1)$ sous-tendu par les vecteurs propres $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ (α, j_1 , j_2 fixes, m_1 et m_2 variables)

1. les valeurs possibles de J sont $|j_1 - j_2|,\ |j_1 - j_2| + 1,\ \ldots,\ j_1 + j_2 - 1,\ j_1 + j_2$
2. à chaque valeur de J correspond une et une seule série de $(2J + 1)$ vecteurs propres $|JM\rangle$ du moment total, avec $M = -J,\ -J + 1,\ \ldots,\ J - 1,\ J$

2. Coefficients de Clebsch-Gordan

$\Rightarrow$ A chaque couple (JM) donné par le théorème d'addition correspond un vecteur propre $|\alpha j_1 j_2 JM\rangle$ du moment cinétique total

$\star$ Pour le définir sans ambiguïté, il sera supposé de norme 1 et sa phase sera fixée par une convention expliquée ci-dessous

$\star$ Les vecteurs $|\alpha j_1 j_2 JM\rangle$ forment, comme les vecteurs $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$, une base orthonormée dans le sous-espace $\mathcal{E}(\alpha j_1 j_2)$

$\star$ On passe de l'une à l'autre par transformation unitaire :

$$|\alpha j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\langle\alpha j_1 j_2 m_1 m_2|\alpha j_1 j_2 JM\rangle \tag{9}$$

$\star$ Les coefficients $\langle \alpha j_1 j_2 m_1 m_2 | \alpha j_1 j_2 J M \rangle$ sont indépendants de α :

dans le sous-espace $\mathcal{E}(\alpha j_1 j_2)$, $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \equiv$ base d'une représentation standard où les composantes de $\boldsymbol{j}_1$ et $\boldsymbol{j}_2$ sont représentées par des matrices indépendantes de α :

$$\langle \tau\, j\, \mu | J_z | \tau'\, j'\, \mu' \rangle = \mu\, \delta_{\tau\tau'} \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} \tag{10}$$

$$\langle \tau\, j\, \mu | J_\pm | \tau'\, j'\, \mu' \rangle = \sqrt{j(j+1) - \mu\mu'}\, \delta_{\tau\tau'} \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'\pm 1} \tag{11}$$

$\Rightarrow$ les matrices représentant $\boldsymbol{J}^2$ et J_z sont également indépendantes de α

$\Rightarrow$ les coefficients $\langle \alpha j_1 j_2 m_1 m_2 | \alpha j_1 j_2 J M \rangle$ sont également indépendantes de α

$\Rightarrow$ caractère **purement géométrique** : ils ne dépendent que des moments cinétiques des systèmes et de leur orientation, mais pas de la nature physique des variables dynamiques 1 et 2 dont on compose les moments cinétiques

$\Rightarrow$ on peut donc les noter $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J M \rangle \equiv$ coefficients de Clebsch-Gordan

$$|\alpha j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\langle\alpha j_1 j_2 m_1 m_2|\alpha j_1 j_2 JM\rangle$$

peut donc s'écrire

$$|\alpha j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\langle j_1 j_2 m_1 m_2|JM\rangle \tag{12}$$

Définition des phases des vecteurs $|\alpha j_1 j_2 JM\rangle$:

$\Rightarrow$ convention des représentations standards

$\Rightarrow$ phases relatives des $(2J+1)$ vecteurs correspondant à la même valeur de J

$\star$ les vecteurs doivent encore être définis à une phase dépendant de J près

$\Rightarrow$ convention :

la composante de $|\alpha j_1 j_2 JJ\rangle$ (dans la base couplée) suivant $|\alpha j_1 j_2 j_1\ J{-}j_1\rangle$ (dans la base découplée) $\equiv$ réelle et positive

$$\langle j_1 j_2 j_1 J - j_1|JJ\rangle \text{ réel} \geq 0 \tag{13}$$

Théorème d'addition $\Rightarrow \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle$ est non nul si

$$m_1 + m_2 = M \quad \text{et} \quad J = |j_1 - j_2|,\ |j_1 - j_2| + 1,\ \ldots,\ j_1 + j_2 - 1,\ j_1 + j_2 \tag{14}$$

(14) $\equiv$ **règles de sélection des coefficients de Clebsch-Gordan**

Coefficients de Clebsch-Gordan $\equiv$ coefficients d'une transformation unitaire

$\Rightarrow$ **relations d'orthogonalité**

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J'M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \tag{15}$$

$$\sum_{JM} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \langle j_1 j_2 m_1' m_2' | JM \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \tag{16}$$

Rappel :

$|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \equiv$ fonction propre de J_z, de valeur propre $m_1 + m_2$

Mais ! $$[j_{1z}, \boldsymbol{J}^2] \neq 0, \quad [j_{2z}, \boldsymbol{J}^2] \neq 0$$

En effet $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{j}_1^2 + \boldsymbol{j}_2^2 + 2\boldsymbol{j}_1 \cdot \boldsymbol{j}_2$

$$\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{j}_1^2 + \boldsymbol{j}_2^2 + 2(j_{1x}j_{2x} + j_{1y}j_{2y} + j_{1z}j_{2z})$$

Or $[j_{1z}, j_{1x}] \neq 0, \qquad [j_{1z}, j_{1y}] \neq 0$

A forme un ECOC avec $\boldsymbol{j}_1^2$, $\boldsymbol{j}_2^2$, j_{1z}, j_{2z}

$$[A, \boldsymbol{j}_1^2] = 0, \quad [A, \boldsymbol{j}_2^2] = 0, \quad [A, \boldsymbol{j}_{1z}] = 0, \quad [A, \boldsymbol{j}_{2z}] = 0$$

$$[A, j_{1i}] = 0, \quad [A, j_{2i}] = 0 \qquad i = x, y, z$$

$$j_{1\pm} = j_{1x} \pm j_{1y}$$

$$\Rightarrow [A, j_{1\pm}] = 0, \quad [A, j_{2\pm}] = 0$$

$$\begin{array}{rcl}
A|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle & = & a|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \\
j_{1\pm}|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle & = & \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)}|\alpha j_1 j_2 (m_1 \pm 1) m_2\rangle \\
(A j_{1\pm} - j_{1\pm} A)|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle & = & 0 \\
\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)} A|\alpha j_1 j_2 (m_1 \pm 1) m_2\rangle & = & j_{1\pm} a|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \\
 & = & \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)} a|\alpha j_1 j_2 (m_1 \pm 1) m_2\rangle \\
A|\alpha j_1 j_2 (m_1 \pm 1) m_2\rangle & = & a|\alpha j_1 j_2 (m_1 \pm 1) m_2\rangle
\end{array}$$

Toute combinaison linéaire de fonctions propres d'un opérateur de même valeur propre est encore fonction propre de cet opérateur, avec la même valeur propre.

Les fonctions propres de $\boldsymbol{J}^2$ sont des combinaisons linéaires de fonctions propres de $\boldsymbol{j}_{1z}$ et $\boldsymbol{j}_{2z}$, avec des valeurs de m_1 et m_2 différentes, de même valeur propre a, et de $m_1+m_2=M$ fixé

$$|\alpha j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\langle j_1 j_2 m_1 m_2|JM\rangle$$

$$m_1+m_2=M \quad \text{et} \quad |j_1-j_2| \leq J \leq j_1+j_2$$

Les valeurs de j_1 et j_2 sont fixés : il n'existe pas d'opérateur général permettant de passer d'une fonction propre de j_1 fixé à la fonction propre $j_1 \pm 1$.

Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan

1. cas simples : détermination directe des combinaisons linéaires (12)

   Pour $J = j_1 + j_2$ et $M = J$: $|JM\rangle$ n'a qu'une seule composante dans la base découplée, correspondant à $m_1 = j_1$ et $m_2 = j_2$

$$|\alpha j_1 j_2\; j_1{+}j_2\; j_1{+}j_2\rangle = |\alpha j_1 j_2 j_1 j_2\rangle \tag{17}$$

2. application répétée de $J_- \equiv j_{1-} + j_{2-}$ aux deux membres

   $\Rightarrow$ construction de tous les vecteurs $|\alpha j_1 j_2 JM\rangle$ correspondant à $J = j_1 + j_2$

3. construction des vecteurs de la série $J = j_1 + j_2 - 1$ en commençant par celui de plus grande valeur de $M = J$, déterminé sans ambiguïté par orthogonalité au vecteur $|\alpha j_1 j_2\; j_1{+}j_2\; j_1{+}j_2{-}1\rangle$ et avec la condition de phase (13) ; les autres vecteurs de la même série sont obtenus par application répétée de J_-

Application de J_+ ou J_- aux deux membres de l'équation (12)

$\Rightarrow$ **relations de récurrence des coefficients de Clebsch-Gordan**

$$\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\langle j_1 j_2 m_1 m_2|J\ M+1\rangle =$$

$$\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}\langle j_1 j_2\ m_1-1\ m_2|JM\rangle$$

$$+\sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}\langle j_1 j_2\ m_1\ m_2-1|JM\rangle \tag{18}$$

$$\sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\langle j_1 j_2 m_1 m_2|J\ M-1\rangle =$$

$$\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)}\langle j_1 j_2\ m_1+1\ m_2|JM\rangle$$

$$+\sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2+1)}\langle j_1 j_2\ m_1\ m_2+1|JM\rangle \tag{19}$$

Pour $M = J$, le premier membre de (18) s'annule

$\Rightarrow$ tous les coefficients $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J J \rangle$ sont multiples l'un de l'autre

La condition de normalisation du vecteur $|\alpha j_1 j_2 J J\rangle$

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J J \rangle^2 = 1$$

et la condition de phase (13) achèvent de les déterminer

Tous les autres coefficients de Clebsch-Gordan s'obtiennent par application de la relation de récurrence (19)

Les symboles 3-j de Wigner

Définition :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-m_3} \ (2j_3+1)^{-\frac{1}{2}} \ \langle j_1 \ j_2 \ m_1 \ m_2 | j_3 \ \ -m_3 \rangle \tag{20}$$

Valeur explicite des symboles $3j \equiv$ formule de Racah

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-m_3} \sqrt{\Delta(j_1 j_2 j_3)}$$

$$\times \sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!}$$

$$\times \sum_t (-1)^t \ \{t!(j_3-j_2+t+m_1)!(j_3-j_1+t-m_2)!$$

$$\times (j_1+j_2-j_3-t)!(j_1-t-m_1)!(j_2-t+m_2)!\}^{-1}$$

$$\text{avec} \quad \Delta(j_1 j_2 j_3) = \frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_2+j_3-j_1)!(j_3+j_1-j_2)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!} \tag{21}$$

$$m_1+m_2+m_3=0, \qquad j_3 = |j_1-j_2|, |j_1-j_2|+1, \ldots, j_1+j_2-1, j_1+j_2 \tag{22}$$

Exercice sur les coefficients de Clebsh-Gordan

Considérons un système constitué de deux moments cinétiques

$\ell = 1$ (états p)

1. **Quelle est la dimension de l'espace des états de ce système ?**

   Indication : Dénombrer les paires (m_1, m_2) différentes.

2. **Vérifier que la somme des dimensions des sous-espaces de L fixé est la même que celle trouvée en 1.**

   Indication : Dénombrer les états de valeurs de L ou M différentes.

3. **Calculer toutes les composantes de tous les états $|LM\rangle$ dans la base des états $|m_1\, m_2\rangle$.**

   Indications : Appliquer l'opérateur d'échelle L_-, en commençant par l'état de (L, M) les plus élevés. Pour déterminer l'état de L suivant, appliquer l'orthogonalité entre états de L différents ainsi que la convention de phase (13).

4. **Montrer que la matrice des coefficients trouvés en 3 forme une matrice orthogonale.**

   Indication : une matrice carrée est orthogonale si sa transposée est égale à son inverse. La valeur absolue de son déterminant vaut 1.

5. **Interpréter les résultats de 4.**

6. **En déduire les deux relations de fermeture des coefficients de Clebsch-Gordan.**

   Indication : Les vecteurs propres d'un opérateur hermitique sont orthogonaux. D'autre part, les vecteurs propres ici sont normalisés.

7. **Justifier la forme bloc-diagonale de la matrice trouvée en 4.**

   Indication : considérer les relations de commutation des opérateurs $\boldsymbol{\ell}_1^2$, $\boldsymbol{\ell}_2^2$, $\boldsymbol{L}^2$, $\boldsymbol{\ell}_{1z}$, $\boldsymbol{\ell}_{2z}$, $\boldsymbol{L}_z$.

8. **Transformer les coefficients de Clebsh-Gordan obtenus en 3 en symboles 3-j de Wigner.**